Д о к а з а т е л ь с т в о. Анализируя систему уравнений (6), находим восемь фокальных точек квадрики Ли, шесть из которых совпадают с точкой $C_0 \equiv E^*_{1,2}$, а два других определяются формулой

$$F_{7,8} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(3b^2+1)}\, C_0 + C_1 + C_2 \pm \frac{b\sqrt{2(3b^2+1)}}{2b^2+1}\, C_3.$$

Возвращаясь к исходному реперу R, получим

$$F_{7,8} = 2b\, E_{1,2} \pm 2\sqrt{2(3b^2+1)}\, A_3,$$

откуда $(E_{1,2}, A_3; F_7, F_8) = -1$, что и доказывает утверждение теоремы.

Список литературы

1. Ф и н и к о в С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. М.-Л., ОНТИ, 1937.

2. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве. - Тр. геометр. семинара. ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с. 113-133.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
ВЫП. 13 1982

И.С. Г р и г о р ь е в а

МЕРА МНОЖЕСТВА ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ В E_n.

В работе изучается мера множества гиперплоскостей в E_n, инвариантная относительно группы движений. Отыскивается выражение этой меры через геометрические характеристики неголономного образа, а также дивергентный вид получаемой при этом гауссовой кривизны.

1. Семейство гиперплоскостей в E_n зависит от n параметров. Меру обычно ищут в виде интеграла $\int\Omega = \int f d\mu$, где μ - мера Лебега в пространстве параметров, а f - положительная интегрируемая функция.

Если за параметры взять расстояние P до гиперплоскости от начала координат и единичный вектор нормали $\bar{n}$, то с точностью до постоянного множителя, (ср. [1])

$$\pm\Omega = dP \wedge d\sigma, \tag{1}$$

где $d\sigma$ - элемент сферического отображения. Знак выбирается так, чтобы $\int\limits_U \Omega$ был положителен для любой области U.

Если рассмотреть в какой-либо области $V \subset E_n$ неголономный образ X_n^{n-1}, то можно говорить о мере множества составляющих его гиперплоскостей. Элемент меры Ω отыскивается с помощью введения поля ортонормированных реперов $\{e_\alpha\}$, $\alpha = \overline{1,n}$, где e_n - вектор нормали к гиперплоскости. Будем считать это поле гладким. Тогда

$$d\bar{r} = \omega^i \bar{e}_i + \omega^n \bar{e}_n,$$
$$d\bar{e}_i = \omega_i^s \bar{e}_s + \omega_i^n \bar{e}_n, \quad i,s = \overline{1,n-1},$$

$$d\bar{e}_n = \omega_n^s \bar{e}_s .$$

Формы ω^α_β -кососимметричны в орторепере и разлагаются по основным формам ω^α : $\omega^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma$, где $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ - коэффициенты евклидовой связности.

Подставляя в (1) выражение для dp и $d\sigma$, получим

$$\pm\Omega = \omega^n \wedge \omega^1_n \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1}_n ,$$

или, подставляя выражение для ω^i_n ,

$$\pm\Omega = \Gamma^1_{n[s_1} \cdot \Gamma^2_{|n|s_2} \cdot \ldots \cdot \Gamma^{n-1}_{|n|s_{n-1}]} \, \omega^n \wedge \omega^{s_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{s_{n-1}} ,$$

т. есть $\pm\Omega = K\,dV$, где K -определитель матрицы Γ^i_{nj} , а dV -элемент объема в E_n.

При преобразовании орторепера, сохраняющем $\bar{e}_n$; $-\Gamma^i_{nj} = \Gamma^n_{ij} = b_{ij}$ является тензором, а в голономном случае переходит в матрицу второй квадратичной формы интегральной гиперповерхности. Следовательно, в последнем случае K -гауссова кривизна соответствующей гиперповерхности [2] . Можно назвать K гауссовой кривизной и в общем случае (тем более, что для $n=3$ это определение совпадает с определением Д.Н.Синцова [3]).

2.Можно рассмотреть $(n-1)$ -форму Θ.

$$\Theta = \omega^1 \wedge \omega^2_n \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1}_n + \omega^1_n \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1}_n + \ldots + \omega^1_n \wedge \omega^2_n \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1} .$$

Ее внешний дифференциал $d\Theta = (n-1)(\pm\Omega)$. Следовательно, в области V , где K сохраняет знак,

$$\int_V \Omega = \frac{1}{n-1} \int_{\partial V} \Theta .$$

Форму Θ можно представить в виде

$$\Theta = \alpha^1 \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^n - \alpha^2 \wedge \omega^1 \wedge \omega^3 \wedge \ldots \wedge \omega^n + \ldots + (-1)^{n-1} \alpha^n \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-1}$$

Тогда $dK = div\,\bar{a}$, а вектор $\bar{a}$ можно найти из соотношения $\omega^i \wedge \Theta = a^i \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^n$. Произведя необходимые преобразования, получим

$$\frac{1}{n(n-1)} a^i = -\nabla_{s_1} e^{[2}_n \ldots \nabla_{s_{n-2}} e^{n-1}_n e^n_n \varepsilon^{1i]s_1 \ldots s_{n-2}} ,$$

где $\varepsilon^{i_1 \ldots i_n}$ -дискриминантный n-вектор в E_n. С помощью этого векторного поля интеграл от K по V можно свести к интегралу по границе ∂V.

3.Можно усмотреть некоторую связь Ω с тензором кривизны Схоутена неголономного образа. Он определяется (см.[4]) из соотношения

$$\nabla_{[i} \nabla_{j]} v^\ell = \frac{1}{2} K_{ijk}{}^{\ell} v^k + M^n_{ij} \nabla_n v^\ell ,$$

где $K_{ijk}{}^{\ell}$ -тензор кривизны, а M^n_{ij} характеризует неголономность образа.

В нашем частном случае, в ортонормированном репере тензор кривизны Схоутена представляется в виде

$$K_{ijk\ell} \overset{*}{=} b_{kj} b_{\ell i} - b_{ki} b_{\ell j} ,$$

где $b_{ij} = \Gamma^n_{ij}$ -как раз та матрица, определитель которой участвует в определении элемента меры. Значит, тензор кривизны определяет миноры второго порядка этой матрицы, а следовательно (с точностью до знака) и определитель ее.

Список литературы

1.К е н д а л л М., М о р а н П. Геометрические вероятности. Наука ,М.,1972.

2.Ми щ е н к о А.С.,Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. Изд-во Моск.ун-та,1980.

3.С и н ц о в Д.Н. О системах интегральных кривых Пфаффова уравнения.- Вища школа ,Киев,1972.

4.В а г н е р В.В. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий.Казань.,1939.